

MATEMATICA GENERALE: Compito del 30 gennaio 2013

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiedi al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente prima* di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

Esercizio 1: Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro x_0 e raggio $r \geq 0$, si considerino gli insiemi :

$$A = I(-2, 5), \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 2x + 3 \geq 1 \right\}, \quad C = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \frac{1}{\ln x} \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

1. Dire, motivando le risposte, se $A \subseteq B$ e se $C \subseteq B$.
2. Determinare $A \cup B$ e $B \cup C$.
3. Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

Esercizio 2: Risolvere la disequazione $\frac{5-x}{x+3} > x$.

Esercizio 3: Data la funzione $f(x) = 2[\ln(x) + \ln(2-x)]$

determinarne:

1. il dominio;
2. il segno;
3. gli eventuali asintoti;
4. gli intervalli di crescita e decrescenza;
5. eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
6. gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali flessi;
7. il grafico.

Esercizio 4: Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione $f(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$ in corrispondenza dell'intervallo $(-1, 1)$.

Esercizio 5: Calcolare l'integrale

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

Esercizio 6: Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{\pi} \right)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+3n^2}{\ln n^2}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

Esercizio 7 : Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. determinare $-A^2$;
2. dire, motivando la risposta, se A è invertibile;
3. calcolare la traccia $\text{tr}(A-2B)$.