

Matematica generale: compito del 30 gennaio 2013

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chieda al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ln x^2 \in \mathbb{R}\}, \quad B = I(2, 5), \quad C = \{x \in \mathbb{R} : x + 3 \leq 1\}.$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se $B \subseteq A$ e se $C \subseteq A$.
- (b) Determinare $A \cup B$ e $B \cup C$.
- (c) Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{x+1}{2x-1} < x-1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \ln(-x^2 + 2x)$$

determinarne

- (a) il dominio;
 - (b) il segno;
 - (c) gli eventuali asintoti;
 - (d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
 - (e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
 - (f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
 - (g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione $f(x) = e^{1-3x} - e$, in corrispondenza dell'intervallo $(-1, 1)$.
5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x^2 e^x dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{7^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{\ln(n)}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Sia A la matrice del sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

- (a) Calcolare $\det A$.
- (b) Risolvere il sistema con il metodo che si preferisce.
- (c) Dire se A è simmetrica.